Leçon 152 :Déterminant. Exemples et applications.

Développements :

Ellipsoïde de John-Loewner, Topologie des orbites de Steinitz.

Bibliographie :

Rombaldi, Gourdon (Analyse ET Algèbre), OA.

Remarque 1. *K de caractéristique différente de 2.*

1 Définitions

1.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 2 (Gourdon p134)**.** *Forme p linéaire. Notatin.*

Définition 3 (Gourd p134)**.** *Forme antisymétrique.*

Définition 4 (Gourdon p134)**.** *Forme alternée.*

Proposition 5 (Gourdon p135)**.** *[Romb p537] f est antisymétrique si et seulement si f est alternée.*

Proposition 6 (Romb p537)**.** *Soit $B = (e_1, ...e_n)$ une base de E. L'ensemble des formes linéaires alternées est de dimension 1 engendré par l'application $det_B(x_1, ...x_n) = ...$.*

Remarque 7 (Romb p538)**.** *det_B est l'unique forme n linéaire alternée qui vaut 1 en $(e_1, ..e_n)$.*

Définition 8 (Romb p538)**.** *$det_B(x_1, ..x_n)$ est le déterminant dans la base B de $(x_1, ..x_n)$.*

Théorème 9 (Romb p538)**.** *Relation de Chasles.*

Remarque 10 (Romb p539)**.** *$det_B(B')det_{B'}(B) = 1$.*

Proposition 11 (Romb p539)**.** *Famille liée et déterminant.*

Corollaire 12 (Romb p539)**.** *Base et déterminant.*

1.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 13 (Romb p539)**.** *Pour tout endomorphisme u, il existe λ_u tel que pour toute forme n linéaire alternée ϕ, $\phi \circ u = \lambda_u \phi$. En particulier, $\lambda_u = det_B(u(e_1), .., u(e_n))$.*

Définition 14 (Romb p539)**.** *λ_u est le déterminant de u. Ne dépend pas de la base choisie.*

Proposition 15 (Romb 540)**.** *$det(id) = 1$, $det(\lambda u) = \lambda^n u$, $det(u \circ v) = det(u)det(v)$.*

u est inversible si et seulement si $det(u) \neq 0$ si et seulement si $(f(e_1), .., f(e_n))$ est une base de E et dans ce cas, $def(u^{-1}) = 1/det(u)$.

Proposition 16 (Romb p540)**.** *det est un morphisme de groupes surjectifs de $GL(E)$ sur K^*, de noyau $SL(E)$ qui est donc distingué.*

Exemple 17 (Gourdon p145)**.** *Endomorphisme et trace : $f_u = Tr(u)f$.*

1.3 Déterminant d'une matrice

Définition 18 (Romb p541)**.** *Déterminant d'une matrice est le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé.*

Proposition 19 (Romb p541)**.** *C'est le déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique.*

Expression du déterminant de A.

Exemple 20. *Matrice diagonale, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.*

Proposition 21 (Romb p541)**.** *$det : Mn(K)toK$ est une fonction polynomiale homogène de degré n.*

Proposition 22 (Romb p541)**.** *$det(I_n)$, $det(\lambda A)$, $det(A^t)$, $det(AB)$.*

A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $det(A^{-1})$.

Proposition 23 (Romb p541)**.** *Si A et B sont semblables alors elles ont le même déterminant.*

2 Calcul d'un déterminant

2.1 Déterminant triangulaire par blocs

Proposition 24 (Romb p541)**.** *$det(A)$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes. $det(A)$ est inchangé si on ajoute à une de ses colonnes (lignes) une combinaison linéaire des autres. $det(A)$ change de signe si on permute deux colonnes.*

Exemple 25. $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$.

Remarque 26. *L'algorithme du pivot de Gauss permet, en multipliant par des matrices triangulaires, de se ramener à une matrice triangulaire supérieure. On peut alors calculer le déterminant en utilisant que le déterminant du produit est le produit des déterminants.*

$O(n^3)$ au lieu de $O(n!)$.

On se ramène par l'algorithme de Gauss au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Proposition 27 (Romb p542)**.** *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.*

2.2 Mineurs et cofacteurs

Définition 28 (Gourdon p136)**.** *[Rombaldi p543] Mineurs et cofacteurs.*

Proposition 29 (Romb p453)**.** *Développement du déterminant par rapport à une ligne, à une colonne.*

Définition 30 (Romb p544)**.** *Comatrice.*

Proposition 31 (Romb p544)**.** *Formule de la comatrice.*

Remarque 32 (Romb p544)**.** *Pour A inversible, les coefficients de A^{-1} sont des fonctions rationnelles des coefficients $a_{i,j}$. Pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on en déduit que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue de $GL_n(K)$ dans $GL_n(K)$.*

Exemple 33. *$n = 2$.*

Application 34 (Gourdon p140)**.** *Les matrices de $M_2(Q)$ à coefficients entiers d'inverse à coefficients entiers sont celles de déterminant 1 ou -1.*

2.3 Exemples de déterminants

Exemple 35 (Romb p549)**.** *Déterminant de Vandermonde et inversibilité si et seulement si les α_i sont deux à deux distincts.*

Application 36 (Romb p551)**.** *Si f est de classe C^{n+1} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ alors toutes les dérivées comprises entre 1 et n sont également bornées sur $\mathbb{R}$.*

Application 37. *Nombre d'erreurs dans un code cyclique.*

Application 38 (Romb p563)**.** *Application au calcul du déterminant d'une famille étagée de polynômes.*

Exemple 39 (Romb p565)**.** *Déterminant de Cauchy.*

Exemple 40 (Gourdon p146)**.** *Déterminant circulant.*

Application 41. *Suite de polygones.*

Exemple 42 (Gourdon)**.** *Déterminant de Smith.*

Application 43. *Théorème de Brauer.*

3 Applications en algèbre linéaire

3.1 Déterminant et rang

Proposition 44 (Romb p547)**.** *Le rang d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul.*

Application 45 (Gourdon)**.** *Rang de la comatrice de A.*

Application 46. *Topologie des orbites de Steinitz.*

3.2 Systèmes de Cramer

Définition 47 (Romb p546)**.** *[Grifone p142][Gourdon p138] Un système de Cramer est un système linéaire $AX = b$ avec A carrée inversible.*

Proposition 48 (Romb p546)**.** *Unique solution $A^{-1}b$. La solution est donnée par les formules de Cramer. $n^2 n!$ opérations.*

Remarque 49. *Très coûteux, préférer Gauss, LU.*

Proposition 50 (Romb p549)**.** *Théorème de Rouché-Fontené.*

3.3 Polynôme caractéristique

Remarque 51. *Comme le déterminant d'une matrice comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de la matrice, pour H un anneau commutatif unitaire intègre de corps des fractions K, pour tout $M \in M_n(K)$ à coefficients dans A, $det(M) \in H$. Ainsi, pour tout $A \in M_n(K)$, le déterminant de la matrice $A - XI_n \in M_n(K(X))$ est un élément de $K[X]$. On note alors $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.*

$K[X]$ est un anneau intègre donc se plonge dans son corps de fractions $K(X)$, et que la formule du déterminant assure que $\forall M \in M_n(K[X])$, $detM \in K[X]$.

Définition 52 (Gourdon p162)**.** *Polynôme caractéristique.*

Proposition 53 (Gourdon p162)**.** *λ valeur propre si et seulement si $P(\lambda) = 0$.*

Proposition 54 (Gourdon p177)**.** *Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.*

Proposition 55 (Gourdon p177)**.** *[Romb p597] Cayley-Hamilton.*

Application 56 (Romb p598)**.** *Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique donc $dim(K[u]) \leq n$.*

Remarque 57. *Le terme constant de χ_A est $det(A)$. Tous les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers en les coefficients de A.*

4 Applications en analyse

4.1 Régularité du déterminant

Proposition 58 (Gourdon analyse p313)**.** *Caractère polynomial, C^∞, et différentielle.*

Application 59 (Gourdon p208)**.** *L'intérieur des matrices diagonalisables. (Appli de la continuité).*

Application 60. *$GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(R)$.*

Application 61. *Deux matrices semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$: appli du caractère polynomial.*

Application 62 (Gourdon p368)**.** *Wronskien : $w'(t) = tr(A(t))w(t)$.*

Application 63. *Sous-variétés.*

4.2 Changement de variables

Définition 64 (Gourdon analyse p334)**.** *Jacobien.*

Proposition 65 (Gourdon analyse p334)**.** *Changement de variables.*

Exemple 66 (Gourdon analyse p334)**.** *Passage en polaire.*

Exemple 67. *Intégrale de $exp(-x^2)$.*

5 Applications à la géométrie

5.1 Orientation d'un espace euclidien

Proposition 68 (Romb p552)**.** *La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale, de déterminant 1 ou -1.*

Définition 69 (Romb p552)**.** *Deux bases sont en relation si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant 1.*

Proposition 70 (Romb p552)**.** *Cette relation est une relation d'équivalence et il y a exactement deux classes d'équivalence pour cette relation.*

Définition 71 (Romb p553)**.** *Orienter un espace. Base orthonormée directe.*

Exemple 72 (Romb p553)**.** *Les isométries directes sont celles qui respectent l'orientation.*

5.2 Volume

Remarque 73 (OA p184)**.** *Le déterminant a une interprétation géométrique : c'est le facteur de dilatation des volumes.*

Proposition 74 (OA p184)**.** *[Grifone p131] Soit μ la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^n$. Le déterminant de $v_1, .., v_n$ est la mesure du parallélépipède engendré par $v_1, .., v_n$.*

Proposition 75 (OA p184)**.** *[Gourdon p262] Inégalité d'Hadamard avec égalité si et seulement si les vecteurs forment une famille orthogonale. Le volume du parallélépipède est borné par le produit des longueurs des arêtes et ce volume est maximal si et seulement si c'est un parallélépipède rectangle.*

Théorème 76. *John Loewer.*

5.3 Distance d'un point à un sev

Définition 77 (Romb p560)**.** *Matrice de Gram.*

Proposition 78 (Romb p561)**.** *$(x_1, .., x_n)$ est libre si et seulement si $G(x_1, .., x_n) > 0$.*

Proposition 79 (Romb p561)**.** *Soit F un sev de dim finie de E. Distance de x à F selon les déterminants de Gram.*

Remarque 80 (OA p185)**.** *Cette égalité exprime que le volume du parallélépipède engendré par $v_1, .., v_p, x$ est égal au produit des volumes de celui engendré par $v_1, .., v_p$ et de la distance de x à F.*